Matematica finanziaria: svolgimento prova di esame del 15 dicembre 2005

1. **[6 punti cleai, 6 punti altri]** Si possiede un capitale di 1500€ e lo si vuole impiegare per 3 anni. Supponendo che eventuali ricavi intermedi vengano reinvestiti con una legge di interesse semplice al 5% semestrale, calcolare il montante nelle seguenti due ipotesi di investimento:

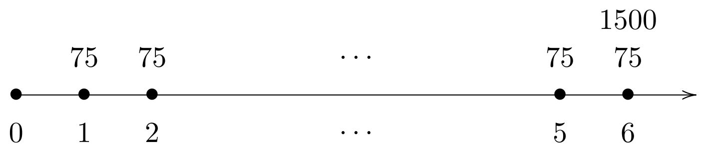
   (a) regime di interesse composto al tasso d'interesse effettivo del 9% annuo;

   (b) regime di interesse composto al tasso d'interesse nominale del 10% annuo, pagabile ogni 6 mesi.

   Svolgimento. Il punto (a) è immediato. In regime d'interesse composto con un tasso d'interesse effettivo non ci sono ricavi intermedi da reinvestire, pertanto il montante è

$$M_{\mathrm{a}} = 1500(1+0.09)^3 = 1942.54.$$

   Nel caso (b), invece, si ha a che fare con un tasso d'interesse *nominale*: 10% di 1500€ significa 150€ "all'anno", e pagabili ogni 6 mesi significa che ogni 6 mesi si incasserà una cedola di 75€. Alla fine del periodo d'investimento, inoltre, ci verrà restituito il capitale iniziale di 1500€. Il grafico di questo investimento è dunque



   Notare che conviene usare come unità di misura il semestre, visto che il tasso di reinvestimento è semestrale e anche le cedole vengono incassate semestralmente. Tre anni corrispondono ovviamente a sei semestri.

   I ricavi intermedi (le cedole semestrali di 75€) vanno reinvestiti tramite la legge $r(t) = 1 + 0.05t$ (dove t misura il tempo, come già detto, in semestri). La prima cedola essendo capitalizzata per 5 semestri, fornirà un montante di $75 \cdot (1 + 0.05 \cdot 5)$, la seconda fornirà un montante di $75 \cdot (1 + 0.05 \cdot 4)$, e così via. Il montante finale sarà

$$\begin{aligned} M_{\mathrm{b}} &= 75 \cdot (1+0.05\cdot 5) + 75 \cdot (1+0.05\cdot 4) + 75 \cdot (1+0.05\cdot 3) \\ &\quad + 75 \cdot (1+0.05\cdot 2) + 75 \cdot (1+0.05\cdot 1) + 75 + 1500 \\ &= 75 \cdot 6 + 75 \cdot 0.05 \cdot (5+4+3+2+1) + 1500 = 2006.25. \end{aligned}$$

■

2. **[7 punti cleai, 6 punti altri]** Sapendo che la forza d'interesse è

$$\delta(t) = \frac{0.2t}{1+0.1t^2}$$

   calcolare la legge finanziaria $r(t)$, dire se si tratta di una legge scindibile e calcolare il montante di proseguimento $M(1,4)$ al quarto anno di un capitale che al primo anno risulta di 500€.

   Svolgimento. Data la forza d'interesse $\delta(t)$ di una legge finanziaria $r(t)$, sappiamo che

$$r(s) = \exp \int_0^s \delta(t)\,dt.$$

   L'esercizio si può quindi apparentemente svolgere solo se si è in grado di calcolare

$$\int_0^s \frac{0.2t}{1+0.1t^2}\,dt.$$

   Non è così. Sappiamo infatti che la forza d'interesse è $r'(t)/r(t)$, e il numeratore di $\frac{0.2t}{1+0.1t^2}$ è proprio la derivata del denominatore! Quindi anche senza fare esplicitamente l'integrale abbiamo trovato

$$r(t) = 1 + 0.1t^2.$$

Le leggi scindibili in una variabile sono solo quelle esponenziali, quindi $r(t)$ non è scindibile (cosa evidente anche dal fatto che la forza d'interesse non è costante). Il montante di proseguimento, infine, si ottiene scontando 500€ di un anno, e poi capitalizzando il risultato per 4 anni. Dunque

$$M = \frac{500}{r(1)} r(4) = \frac{500}{1 + 0.1 \cdot 1^2}(1 + 0.1 \cdot 4^2) = 1181.82.$$

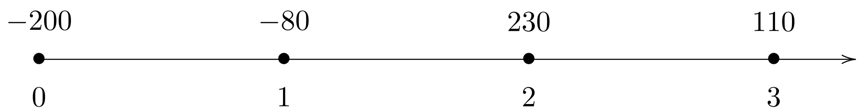
Notare che poiché $r(t)$ non è scindibile, il montante di proseguimento è diverso da quello che si otterrebbe semplicemente capitalizzando i 500 euro per i restanti 3 anni:

$$M \neq 500(1 + 0.1 \cdot 3^2) = 950.$$

■

3. [**4 punti cleai, 4 punti altri**] Calcolare il tasso annuale di rendimento dell'operazione finanziaria $(-200, -80, 230, 110)$ (adesso pago 200, tra un anno pago 80, tra 2 anni ricevo 230, tra 3 anni ricevo 110).

Svolgimento. Il grafico dell'operazione finanziaria è



Posto $\nu = 1/(1+i)$, il $\text{REA}(i)$ di questa operazione finanziaria è

$$\text{REA}(i) = -200 - 80\nu + 230\nu^2 + 110\nu^3$$

L'equazione che permette di determinare il tasso mensile di rendimento i è $\text{REA}(i) = 0$, cioè

$$-200 - 80\nu + 230\nu^2 + 110\nu^3 = 0 \iff -20 - 8\nu + 23\nu^2 + 11\nu^3 = 0.$$

Osservando che $\nu = -1$ risolve l'equazione (cosa osservabile a occhio, ogni volta si ha a che fare con un'equazione si dovrebbe provare se 1 o -1 la risolvono!), ed eseguendo la divisione per $\nu + 1$, troviamo la scomposizione

$$-20 - 8\nu + 23\nu^2 + 11\nu^3 = (\nu + 1)(-20 + 12\nu + 11\nu^2)$$

che porta all'equazione

$$-20 + 12\nu + 11\nu^2 = 0 \iff \nu = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 + 20 \cdot 11}}{11} = \frac{-6 \pm \sqrt{256}}{11} = \frac{-6 \pm 16}{11} = \begin{cases} \frac{10}{11} \\ -2 \end{cases}$$

Le soluzioni per il fattore di sconto sono allora $-2, -1, 10/11$. Poiché valori di ν minori o uguali a 0 sono privi di significato finanziario, il tasso di rendimento cercato esiste ed è

$$i = \frac{1}{\nu} - 1 = \frac{11}{10} - 1 = 0.1$$

■

4. [**4 punti cleai, 4 punti altri**] Scrivere il piano di ammortamento italiano di un prestito di 9000€ rimborsabile in 3 anni e remunerato al 10%.

Svolgimento. Essendo l'ammortamento dei 9000€ di tipo italiano su 3 anni, la quota capitale è pari a $9000/3 = 3000$€. La quota interessi sarà ogni anno pari al 10% del capitale da versare, e dunque $I_1 = 900$, $I_2 = 600$, $I_3 = 300$.

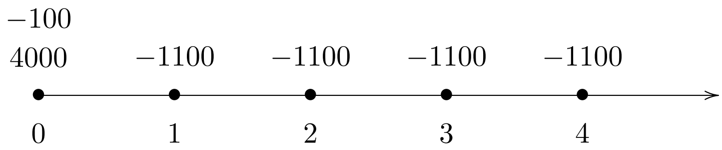
Il piano di ammortamento è allora:

anno	QC	QI	Rata	DR
1	3000	900	3900	6000
2	3000	600	3600	3000
3	3000	300	3300	0

■

5. **[5 punti cleai, 4 punti altri]** Calcolare (al meglio di due cifre decimali) il TAN e il TAEG di un finanziamento di 4000€ in 4 rate annuali da 1100€, supponendo le spese accessorie pari a 100€ per l'apertura del finanziamento.

   Svolgimento. Questo finanziamento si sintetizza, dal punto di vista del debitore, nel seguente grafico:



   Sia TAN che TAEG esistono perchè l'operazione è un finanziamento.

   Il TAN non è 0, visto che la somma delle rate è maggiore della somma finanziata. Calcoliamolo risolvendo con metodi numerici l'equazione in $\nu = 1/(1+i)$

$$f(\nu) = 4000 - 1100\nu - 1100\nu^2 - 1100\nu^3 - 1100\nu^4 = 0.$$

   Poiché

$$f(0.9) > 0, f(1) < 0, f(0.95) > 0, f(0.96) > 0, f(0.97) < 0, f(0.965) < 0$$

   otteniamo che $\nu \in (0.96, 0.965)$, e possiamo approssimarlo al meglio di due cifre decimali con 0.96. Il TAN è allora:

$$\text{TAN} = \frac{1}{\nu} - 1 \simeq 0.04.$$

   Il TAEG si trova risolvendo

$$f(\nu) = 3900 - 1100\nu - 1100\nu^2 - 1100\nu^3 - 1100\nu^4 = 0.$$

   Poiché

$$f(0.9) > 0, f(1) < 0, f(0.95) > 0, f(0.96) < 0, f(0.955) < 0$$

   otteniamo che $\nu \in (0.95, 0.955)$, e possiamo approssimarlo al meglio di due cifre decimali con 0.95. Il TAEG è allora:

$$\text{TAEG} = \frac{1}{\nu} - 1 \simeq 0.05.$$

■

6. **[4 punti cleai, 4 punti altri]** Determinare il tasso a cui valutare l'operazione finanziaria $(-100, 55, 65)$ affinché il REA sia pari a 15€.

   Svolgimento. Il grafico dell'operazione finanziaria è

   Posto $\nu = 1/(1+i)$, il $\text{REA}(i)$ di questa operazione finanziaria è

$$\text{REA}(i) = -100 + 55\nu + 65\nu^2$$

   L'equazione che permette di determinare il tasso richiesto è dunque $\text{REA}(i) = 15$, cioè

$$-100 + 55\nu + 65\nu^2 = 15 \Longleftrightarrow \nu = \frac{-55 + \sqrt{55^2 + 4 \cdot 115 \cdot 65}}{130} = \frac{-55 + \sqrt{32925}}{130}$$

   Notare che abbiamo scartato la soluzione negativa, in quanto priva di significato finanziario. La soluzione scelta è sicuramente positiva, per il teorema di Cartesio.

   Il tasso mensile di rendimento i è quindi

$$i = \frac{1}{\nu} - 1 = \frac{130}{-55 + \sqrt{32925}} - 1 \simeq 0.03$$

■

7. **[5 punti cleai, 4 punti altri]** I titoli A, B, C, D dati dalla tabella 1 sono venduti in maniera tale da produrre $\text{YTM} = 0.1$. Calcolare la durata media finanziaria e la convessità per ciascuno di essi.

   Svolgimento. Dobbiamo calcolare la DMF e la convessità per ciascuno dei 4 titoli in tabella 1. Per i titoli senza cedole (il C e il D) la risposta è immediata:

$$\text{DMF}(C) = 3, \text{CONV}(C) = 9, \text{DMF}(D) = 1 = \text{CONV}(C).$$

   Per A e B, dobbiamo prima di tutto scrivere le loro funzioni REA-forza di interesse:

$$\text{REA}_A(\delta) = 80e^{-\delta} + 80e^{-2\delta} + 1080e^{-3\delta}$$
$$\text{REA}_B(\delta) = 70e^{-\delta} + 70e^{-2\delta} + 1080e^{-3\delta}$$

   Le loro derivate sono allora:

$$\text{REA}'_A(\delta) = -80e^{-\delta} - 160e^{-2\delta} - 3240e^{-3\delta}$$
$$\text{REA}'_B(\delta) = -70e^{-\delta} - 140e^{-2\delta} - 3240e^{-3\delta}$$
$$\text{REA}''_A(\delta) = 80e^{-\delta} + 320e^{-2\delta} + 9720e^{-3\delta}$$
$$\text{REA}''_B(\delta) = 70e^{-\delta} + 280e^{-2\delta} + 9720e^{-3\delta}$$

   Ricordando allora che $\text{YTM} = 0.1$ implica $\delta = \ln 1.1$, si ottiene

$$\text{REA}_A(0.1) = 80e^{-\ln 1.1} + 80e^{-2\cdot\ln 1.1} + 1080e^{-3\cdot\ln 1.1} = 950.263$$
$$\text{REA}_B(0.1) = 70e^{-\ln 1.1} + 70e^{-2\cdot\ln 1.1} + 1080e^{-3\cdot\ln 1.1} = 932.908$$
$$\text{REA}'_A(0.1) = -80e^{-\ln 1.1} - 160e^{-2\cdot\ln 1.1} - 3240e^{-3\cdot\ln 1.1} = -2639.22$$
$$\text{REA}'_B(0.1) = -70e^{-\ln 1.1} - 140e^{-2\cdot\ln 1.1} - 3240e^{-3\cdot\ln 1.1} = -2613.6$$
$$\text{REA}''_A(0.1) = 80e^{-\ln 1.1} + 320e^{-2\cdot\ln 1.1} + 9720e^{-3\cdot\ln 1.1} = 7639.97$$
$$\text{REA}''_B(0.1) = 70e^{-\ln 1.1} + 280e^{-2\cdot\ln 1.1} + 9720e^{-3\cdot\ln 1.1} = 7597.82$$

   e infine:

$$\text{DMF}(A) = 2.77736, \text{CONV}(A) = 8.03985, \text{DMF}(B) = 2.80156, \text{CONV}(B) = 8.14424.$$

   ■

8. **[no cleai, 3 punti altri]** Si assuma una struttura per scadenze descritta dalla tabella 2 e si supponga l'esistenza di un tasso a termine $i(1, 2) = \frac{25}{416}$. Dire se c'è possibilità di arbitraggio ed eventualmente costruirlo.

   Svolgimento. Il tasso forward presente sul mercato è proprio quello che si ottiene dalla struttura a termine data:

$$i(1, 2) = \frac{(1 + i(0, 2))^2}{1 + i(0, 1)} - 1 = \frac{1.05^2}{1.04} - 1 = \frac{25}{416}.$$

   Dunque con i dati assegnati non è possibile costruire un arbitraggio. ■

Tabella 1: Titoli A, B, C, D.

anno di pagamento	A	B	C	D
anno 1	80	70	0	1000
anno 2	80	70	0	0
anno 3	1080	1080	1000	0

Tabella 2: Tassi spot rilevati per i prossimi 5 anni.

anno	1	2	3	4	5
tasso spot	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08